

Valore assoluto: equazioni e disequazioni senza perdere i casi

Matematica · Scuola superiore · proposta per il biennio e ripasso negli anni successivi. La classe precisa dipende dal percorso e dal lavoro svolto a scuola: non è un'assegnazione ministeriale. Revisione docente e prova in classe: **aperte**.

Scheda in breve

Il valore assoluto racconta una distanza: **$|x - c|$ è la distanza tra x e c sulla retta dei numeri**. Una distanza non è mai negativa. Se chiedi che sia uguale a un numero positivo, cerchi due posizioni; se chiedi che sia più piccola, cerchi i punti interni a un intervallo; se chiedi che sia più grande, cerchi quelli esterni. Prima di aprire le barre, però, isola il valore assoluto e guarda il numero con cui lo stai confrontando: zero e numeri negativi richiedono un ragionamento a parte.

Ti serve già saper fare: operazioni con numeri relativi, equazioni e disequazioni di primo grado, semplici frazioni.

Alla fine saprai: risolvere confronti del tipo $|ax + b| = k$, $|ax + b| < k$ e le varianti con $\leq$, $>$, $\geq$, con a diverso da zero e k costante reale; scrivere le soluzioni come intervalli; riconoscere quando non ci sono soluzioni o vanno bene tutti i reali.

Confine della lezione: un solo valore assoluto e un numero costante dall'altra parte, dopo averlo isolato. Le formule non vanno trasferite automaticamente a confronti con un'altra espressione in x , a più valori assoluti o a frazioni con denominatore variabile.

1. Le barre non sono parentesi

Quanto dista -6 da zero? Sei unità. Per questo $|-6| = 6$. Anche $|6| = 6$, mentre $|0| = 0$. Il valore assoluto non restituisce «sempre un numero positivo»: può restituire anche zero.

Per un numero reale u la definizione è questa:

- se $u \geq 0$, allora $|u| = u$;
- se $u < 0$, allora $|u| = -u$.

Quel $-u$ nel secondo caso non significa che il risultato sia negativo. Se $u = -6$, il suo opposto è $-(-6) = 6$. [1, 2]

Con una lettera bisogna stare più attenti. **$|x - 2|$ non è sempre $x - 2$** . Se $x = 5$, il risultato è 3; se $x = 0$, il risultato è 2, non -2 . Non puoi neppure trasformare tutte le sottrazioni in addizioni: $|x - 2|$ non è sempre $x + 2$.

C'è una lettura che aiuta: **$|x - 2|$ misura quanto x è lontano da 2**, da qualunque lato arrivi. In generale, la distanza tra due numeri reali x e c è $|x - c|$. [1, 2]

2. Un'equazione chiede una distanza precisa

Partiamo da $|x - 2| = 5$. Cerchiamo i punti a distanza 5 da 2: uno sta a sinistra, l'altro a destra. Quindi $x = -3$ oppure $x = 7$.

Algebricamente, quando $k > 0$:

$|u| = k$ equivale a $u = -k$ oppure $u = k$. [1, 2]

La parola «oppure» è importante: una soluzione può soddisfare il primo caso, un'altra il secondo. Non chiediamo a uno stesso numero di soddisfarli entrambi.

Esempio svolto A — Il valore assoluto va isolato

Risolvi $2|3x - 4| - 1 = 15$.

Prima aggiungiamo 1 a entrambi i membri e dividiamo per 2:

$2|3x - 4| = 16$, quindi **$|3x - 4| = 8$** .

Adesso separiamo i casi:

- $3x - 4 = -8$, da cui $3x = -4$ e $x = -4/3$;
- $3x - 4 = 8$, da cui $3x = 12$ e $x = 4$.

Soluzione: $S = \{-4/3; 4\}$.

Controllo nell'equazione iniziale: con $x = -4/3$, l'interno delle barre vale -8 ; con $x = 4$ vale 8. In entrambi i casi $2 \cdot 8 - 1 = 15$. Abbiamo controllato le due soluzioni, non soltanto quella intera.

E se a destra c'è zero o un numero negativo?

$|u| = 0$ equivale a $u = 0$. Per esempio, $|4x + 1| = 0$ dà solo $x = -1/4$.

$|u| = k$ con $k < 0$ non ha soluzioni reali: una distanza non può essere negativa. Così $|4x + 1| = -3$ è impossibile. [1, 2]

Nel nostro ambito $|ax + b| = k$, con $a \neq 0$, otteniamo dunque due soluzioni se $k > 0$, una se $k = 0$ e nessuna se $k < 0$. Questa conta non vale per qualunque espressione dentro le barre: dipende anche dal fatto che qui l'espressione è di primo grado con coefficiente di x non nullo.

3. «Meno di»: stai dentro

La richiesta $|x - 2| < 5$ significa: «Scegli i punti che distano da 2 meno di 5». Sono quelli compresi tra -3 e 7 , senza gli estremi.

Per $k > 0$ valgono queste equivalenze:

- **$|u| < k$ equivale a $-k < u < k$;**
- **$|u| \leq k$ equivale a $-k \leq u \leq k$.** [1, 3]

Qui serve una **e**: u deve essere maggiore del limite sinistro **e** minore del limite destro. Se compare $\leq$, sono ammessi anche i punti alla distanza esatta k .

Esempio svolto B — Attenzione al coefficiente negativo

Risolvi $|5 - 2x| \leq 7$.

Scriviamo la doppia disequazione:

$$-7 \leq 5 - 2x \leq 7.$$

Sottraiamo 5 in tutte e tre le parti:

$$-12 \leq -2x \leq 2.$$

Dividiamo tutto per -2 , **invertendo entrambi i versi**:

$$6 \geq x \geq -1.$$

Per leggere da sinistra a destra riordiniamo: $-1 \leq x \leq 6$.

Soluzione: $S = [-1; 6]$. Le parentesi quadre includono gli estremi. Infatti, per $x = -1$ e $x = 6$ otteniamo rispettivamente $|7|$ e $|-7|$: entrambi valgono 7. Con $x = 0$ otteniamo 5, che è minore di 7. Con $x = 7$ otteniamo 9: è fuori dall'intervallo e non soddisfa la disequazione.

4. «Più di»: stai fuori

La richiesta $|x - 2| > 5$ cerca invece i punti lontani da 2 più di 5 unità. Puoi andare a sinistra di -3 **oppure** a destra di 7.

Per $k > 0$:

- $|u| > k$ equivale a $u < -k$ oppure $u > k$;
- $|u| \geq k$ equivale a $u \leq -k$ oppure $u \geq k$. [1, 3]

Non scrivere $-k > u > k$: chiederebbe a u di essere contemporaneamente più piccolo di $-k$ e più grande di k . Qui le due zone sono separate e vanno unite con «oppure».

Esempio svolto C — Due zone separate

Risolvi $|2x + 3| > 9$.

Separiamo i casi:

- $2x + 3 < -9$, quindi $2x < -12$ e $x < -6$;
- $2x + 3 > 9$, quindi $2x > 6$ e $x > 3$.

Soluzione: $S = (-\infty; -6) \cup (3; +\infty)$.

Il simbolo $\cup$ indica l'unione: raccogliamo i numeri del primo intervallo e quelli del secondo. Le parentesi tonde escludono -6 e 3 , perché lì il valore assoluto è proprio 9, mentre noi chiediamo più di 9. Accanto a $\pm\infty$ si usano sempre parentesi tonde: l'infinito non è un estremo reale da includere. [1, 3]

Controllo rapido: $x = -7$ dà 11 e va bene; $x = 4$ dà 11 e va bene; $x = 0$ dà 3 e non va bene. Questi controlli aiutano a scoprire errori, ma è il ragionamento per casi a giustificare l'intero insieme delle soluzioni.

5. Prima delle formule: guarda la soglia

Le regole «dentro» e «fuori» appena scritte assumono $k > 0$. Quando k non è positivo, torna al fatto che $|u| \geq 0$. [1-3]

Richiesta	Che cosa significa
$ u < 0$	Impossibile: nessuna soluzione.
$ u \leq 0$	Deve essere $u = 0$.
$ u > 0$	Deve essere $u \neq 0$.
$ u \geq 0$	Sempre vera, dove u è definito.
$ u < k$ oppure $ u \leq k$, con $k < 0$	Impossibile: nessuna soluzione.
$ u > k$ oppure $ u \geq k$, con $k < 0$	Sempre vera, dove u è definito.

In questa lezione u è un'espressione $ax + b$: è definita per ogni x reale. Perciò «sempre vera» significa $S = \mathbb{R}$, l'insieme di tutti i numeri reali. Nessuna soluzione si indica con $S = \emptyset$.

Per esempio, $|2x + 6| > 0$ è vera per tutti i reali **tranne** $x = -3$, perché solo lì l'interno delle barre si annulla. Non basta dire «il valore assoluto è positivo»: bisogna ricordarsi dello zero.

6. Un problema di tolleranza

In un'attività di laboratorio si ritagliano strisce lunghe idealmente 18 cm. Per l'esercizio si accettano scostamenti di **non più di 0,4 cm**, sia in meno sia in più. Sono dati inventati per ragionare, non una norma tecnica.

Se L è il valore numerico della lunghezza espresso in centimetri, lo scostamento dal valore previsto è $|L - 18|$. La richiesta diventa:

$$|L - 18| \leq 0,4.$$

Quindi $-0,4 \leq L - 18 \leq 0,4$, da cui **$17,6 \leq L \leq 18,4$** .

Una striscia di 17,6 cm è accettata: «non più di» include il limite. Una di 18,5 cm no, perché lo scostamento è 0,5 cm. Se la consegna dicesse «meno di 0,4 cm», entrambi gli estremi sarebbero esclusi.

7. Tre errori da fermare subito

«**Tolgo le barre e basta**». Da $|x + 1| = 4$ non segue soltanto $x + 1 = 4$: manca il caso $x + 1 = -4$.

«**Con maggiore cerco l'intervallo centrale**». Prova il centro: se $|x - 2| > 5$, $x = 2$ dà zero e non può andare bene. Questo piccolo controllo ti segnala che devi cercare fuori.

«**Ho diviso per un negativo, ma lascio i versi uguali**». Il valore assoluto non cambia questa regola delle disequazioni. Se dividi una doppia disequazione per un numero negativo, inverti tutti e due i versi e poi riscrivi gli estremi in ordine crescente.

8. Prova tu

Scrivi le soluzioni e controlla almeno un valore nella relazione iniziale. Per le disequazioni controlla anche gli estremi, quando ci sono.

1. Calcola $|-9|$, $|0|$ e $|3 - 8|$. Spiega in una frase perché il terzo risultato non è -5 .
2. Risolvi $|x + 4| = 6$.
3. Risolvi $3|2x + 1| + 2 = 17$.
4. Risolvi $|3x - 2| < 4$ e scrivi il risultato come intervallo.
5. Risolvi $|7 - 2x| \leq 3$. Mostra il passaggio in cui dividi per un numero negativo.
6. Risolvi $|4x + 1| \geq 7$ e scrivi il risultato come unione di intervalli.
7. Senza aprire le barre meccanicamente, risolvi questi quattro casi: **a)** $|x - 5| < 0$; **b)** $|x - 5| \leq 0$; **c)** $|x - 5| > 0$; **d)** $|x - 5| \geq 0$.
8. Risolvi **a)** $2|x + 3| + 1 \leq -1$; **b)** $|x + 3| > -2$. Spiega perché i risultati sono così diversi.
9. Per un gioco didattico, una lettura T è accettata se dista da 24 non più di 1,5. Scrivi una disequazione con il valore assoluto e trova l'intervallo ammesso. Le letture 22,5 e 25,6 sono accettate? I dati sono costruiti per l'esercizio.
10. Luca scrive: « $|2x - 1| > 5$, quindi $-5 < 2x - 1 < 5$, perciò $-2 < x < 3$ ». Trova l'errore, correggi l'insieme soluzione e scegli un numero che smentisca la sua risposta.

9. Soluzioni ragionate

1. I risultati sono 9, 0 e 5. Nel terzo caso $3 - 8 = -5$, ma la sua distanza da zero è 5.
2. $x + 4 = -6$ oppure $x + 4 = 6$. Quindi **$S = \{-10; 2\}$** . Controllo: $|-10 + 4| = |-6| = 6$; $|2 + 4| = |6| = 6$.
3. Prima isola il valore assoluto: $3|2x + 1| = 15$, poi $|2x + 1| = 5$. Da $2x + 1 = -5$ ottieni $x = -3$; da $2x + 1 = 5$ ottieni $x = 2$. **$S = \{-3; 2\}$** . In entrambi i casi l'espressione iniziale vale $3 \cdot 5 + 2 = 17$.
4. $-4 < 3x - 2 < 4$; aggiungi 2: $-2 < 3x < 6$; dividi per 3: **$-2/3 < x < 2$** . Quindi **$S = (-2/3; 2)$** . Gli estremi danno valore assoluto 4 e sono esclusi; $x = 0$ dà 2 e va bene.
5. $-3 \leq 7 - 2x \leq 3$, quindi $-10 \leq -2x \leq -4$. Dividendo per -2 : $5 \geq x \geq 2$. Riscrivendo in ordine crescente, **$S = [2; 5]$** . Gli estremi danno rispettivamente $|3|$ e $|-3|$, quindi sono inclusi.
6. $4x + 1 \leq -7$ oppure $4x + 1 \geq 7$. Dunque $x \leq -2$ oppure $x \geq 3/2$. **$S = (-\infty; -2] \cup [3/2; +\infty)$** . Gli estremi danno valore assoluto 7 e sono inclusi; $x = 0$ dà 1 e non è soluzione.
7. **a)** **$S = \emptyset$** : un valore assoluto non è negativo. **b)** $x - 5$ deve essere zero, quindi **$S = \{5\}$** . **c)** $x - 5$ non deve essere zero, quindi **$S = \mathbb{R} \setminus \{5\}$** , cioè tutti i reali tranne 5. **d)** **$S = \mathbb{R}$** , perché ogni valore assoluto è non negativo.
8. **a)** Sottrai 1 e dividi per 2: $|x + 3| \leq -1$. È impossibile, quindi **$S = \emptyset$** . **b)** Un numero non negativo è sempre maggiore di -2 : **$S = \mathbb{R}$** . Anche $x = -3$ va bene, perché $0 > -2$.
9. La richiesta è **$|T - 24| \leq 1,5$** , quindi **$-1,5 \leq T - 24 \leq 1,5$ e $22,5 \leq T \leq 25,5$** . La lettura 22,5 è accettata, perché lo scostamento è esattamente 1,5; 25,6 è esclusa, perché lo scostamento è 1,6.

10. Luca ha usato la regola di «minore» per una richiesta di «maggiore». Serve $2x - 1 < -5$ oppure $2x - 1 > 5$. Ottieni $x < -2$ oppure $x > 3$, cioè $S = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Per smentirlo basta $x = 0$: sta nell'intervallo proposto da Luca, ma $|2 \cdot 0 - 1| = 1$ non è maggiore di 5. Gli estremi -2 e 3 restano esclusi.

10. Il controllo prima di chiudere il quaderno

Hai isolato il valore assoluto? Hai guardato se la soglia è positiva, nulla o negativa? Hai scelto «e» per stare dentro e «oppure» per stare fuori? Hai incluso gli estremi soltanto quando il segno lo permette? Un controllo nell'espressione di partenza è l'ultimo passaggio, non un'aggiunta facoltativa quando il risultato sembra strano.

Fonti per approfondire

I testi e gli esercizi di questa lezione sono originali. Le regole sono state confrontate con due opere indipendenti; gli esempi numerici qui proposti non sono tratti dai loro esercizi.

[1] Jay Abramson et al., College Algebra 2e, OpenStax, 2021: § 3.6, “Understanding Absolute Value” e “Solving an Absolute Value Equation”; § 2.7, “Using Interval Notation”, “Using the Properties of Inequalities” e “Solving Absolute Value Inequalities”.

[2] Paul Dawkins, Paul's Online Math Notes, Lamar University, Algebra, § 2.14 “Absolute Value Equations”: “Geometric Definition”, “Mathematical Definition”, regola prima dell'Example 1 ed Example 2.

[3] Paul Dawkins, stessa opera, § 2.15 “Absolute Value Inequalities”: “Inequalities Involving $<$ and $\leq$ ”, “Inequalities Involving $>$ and $\geq$ ”, Examples 3-4. I riferimenti [2] e [3] appartengono alla stessa opera e non sono contati come due fonti indipendenti.